学校编码：**10384** 分类号________密级______

学号:**19020101152522** **UDC**______

厦门大学

硕 士 学 位 论 文

A,Q-模拟 Bernstein 算子在 CAGD 中的应用

The applications of a,q-analogue of Bernstein Operators in CAGD

张 瑶 函

指导老师姓名：曾晓明 教授

专 业 名 称 ：计 算 数 学

论文提交时间：2013 年 5 月 2 号

论文答辩时间：2013 年 5 月 号

学位授予时间：2013 年 6 月 号

答辩委员会主席：____________

评 阅 人：____________

2013 年 6 月

厦门大学学位论文原创性声明

兹呈交的学位论文，是本人在导师指导下独立完成的研究成果。本人在论文写作中参考的其他个人或集体的研究成果，均在文中以明确方式标明。本人依法享有和承担由此论文产生的权利和责任。

声明人（签名）：

年　　月　　日

厦门大学学位论文著作权使用声明

本人完全了解厦门大学有关保留、使用学位论文的规定。厦门大学有权保留并向国家主管部门或其指定机构送交论文的纸质版和电子版，有权将学位论文用于非赢利目的的少量复制并允许论文进入学校图书馆被查阅，有权将学位论文的内容编入有关数据库进行检索，有权将学位论文的标题和摘要汇编出版。保密的学位论文在解密后适用本规定。

本学位论文属于

1、保密（ ），在 年解密后适用本授权书。

2、不保密（ ）

（请在以上相应括号内打“√”）

作者签名： 日期： 年 月 日

导师签名： 日期： 年 月 日

摘要

正如大家所熟知的，在几何造型中，Bézier 曲线是一个被普遍研究的对象，同时也是结构最简单的曲线之一，随着对曲线形状真实性,实时性要求越来越高，一类带有参数的广义 Bézier 曲线的出现，为其他领域提供了合适的工具，特别是在计算机辅助几何设计领域，促进了自由型曲线的发展。

本文首先介绍一类多项式$b_i^n(x;\mathrm{a}\,|\,q)$，它是从 Nowak 提出的 a,q-模拟 Bernstein 算子中提取出来的，带有双参数 a 和 q。它推广了经典 Bernstein 多项式，Bernstein-Stancu 多项式（Stancu 于 1968 年提出，Goldman 之后将这种多项式应用于 CAGD 中），q-Bernstein 多项式（Phillips 于 1996 年提出,并应用于 CAGD 中）。然后以此多项式构成一组基，给出了这类算子基的一些基本性质：非负性、单位分解性、退化性、升阶、递推性等，并给出了一些恒等式以及在任意区间的拓展。之后通过把这类 a,q-模拟广义 Bernstein 算子基应用于 CAGD 中，构造一种新的 Bézier 曲线。它是 q-Bernstein 基和 Bernstein-Stancu 基构造曲线的一种推广，q-Bernstein 基和 Bernstein-Stancu 基构造的曲线是 a,q-Bézier 曲线的特殊情况，可以通过 a,q 参数的取定而退化成相应的曲线。文章之后讨论了 a,q-Bézier 曲线的升阶，降阶和 De casteljau 算法等。第三章运用 a,q-Bernstein 基函数和 Poisson 基函数来构造一种张量积，通过这类张量积基函数来构造带参数的张量积曲面。并给出了张量积 a,q-模拟 Bernstein-Poisson 基函数的定义，在 a,q-模拟 Bernstein 基函数和 Poisson 基函数的基本性质的基础上讨论了这类基函数的基本性质，它延续了许多 a,q-模拟 Bernstein 基函数和 Poisson 基函数的基本性质。

关键词： a,q-模拟广义 Bernstein 算子； a,q-模拟 Bézier 曲面； a,q-模拟 Bézier-Poisson 曲面

Abstract

As it is known that in geometric modelling, Bézier curve is a common object of study and is one of the simple curve in structure. Due to the authenticity of curve shape and the real time demand is higher and higher, a class of the generalized curve with parameters appeared, for other areas to provide the proper tools, especially in computer aided geometric design.It promote the development of the free shape curve.

This paper put forward the polynomial $b_i^n(x;a\,|\,q)$,which is extracted from the a,q-analogue Bernstein operator,which is put forward by Nowak,depending on two parameters a and q, which generalize classical Bernstein polynomials,Bernstein-Stancu polynomials defined by Stancu in 1968 and applied in CAGD by Goldman,as well as q-Bernstein polynomials introduced and applied in CAGD by Phillips in 1996.Then constitute a set of polynomial basis.Basic properties of the polynomial contain non-negative, partition of unity, linear independence, degenerative, degree elevation, degree elevation,degree reduction and so on are given and give some proves of identity and the expansion of the bases at any interval .Then applys a,q-analogue of Bernstein in CAGD to constructs a novel generalization of Bézier curve. It is a kind of generalization of the curve constructed by q-Bernstein base and the curve constructed by Bernstein-stancu base,and the curve is a special case of a,q-analogue Bézier curve.By adjust the parameter,the a,q-analogue Bézier curve can degenerate into the corresponding curve.This parametric curve is represented using a generalized Bernstein basis and the concept of total positivity is applied to investigate the shape properties of the curve. Studying the nature of degree elevation, degree reduction and De-casteljau algorithm for this curve and show that degree elevation is variation diminishing. Chapter 3 gives the definition ,analysis and proof of properties of the tensor product a,q-analogue Bernstein-Poisson basis function in detail, and also studies the basic properties of the bases and the surface.It retains many basic properties of a,q-analogue Bernstein bases and Poisson bases.

Key words: a,q-analogue Bernstein operator; a,q-analogue Bézier curve; a,q-analogue Bézier-Poisson surface

目 录

Contents

第一章　引言

1.1 背景介绍

计算机辅助几何设计（Computer Aided Geometric Design，简称CAGD)是随着航空，造船，机械设计和制造等现代工业的蓬勃发展与计算机的出现而发生与发展起来的一门新兴的交叉学科，Bézier曲线曲面造型是计算机辅助几何设计和计算机图形学等领域的重要研究内容，主要研究在计算机环境下曲线曲面的表示，设计，实现和分析等，涉及到计算机动画，科学计算的可视化，图像处理，计算机视觉等众多学科，具有广泛的应用背景。法国雷洛汽车公司的于1971年发表了一种控制多边形定义曲线的方法，设计员只需移动控制顶点就能方便的修改曲线的形状，而且形状完全在预料之中。Bézier方法简单易用，又出色的解决了整体形状控制问题。Bézier方法在CAGD学科中占有出色的位置，它广为人们接受，为CAGD的发展奠定了坚实的基础。之后德布尔于1972年给出了B样条的一套标准算法，从而出现了B样条曲线曲面，它几乎继承Bézier方法的一切优点，且较成功的解决了局部控制问题和连接问题。无论是Bézier方法还是B样条方法，都较成功地解决了自由曲线曲面形状的描述问题。到20世纪80年代后期，非均匀有理B样条方法成为了用于曲线曲面描述的最广为流传的数学方法。

后来，Goldman等人提出了Poisson曲线和有理Bézier曲线，Bernstein基函数的极限情形就是Poisson基函数，因此许多文章对Poisson曲线进行了研究。经过近半个世纪的发展，传统的曲线曲面造型技术已经比较成熟，但是如今人们审美观念不断加深，随之而来的是对曲线曲面的要求越来越高，图像显示的真实性，实时性要求的日益增强，因此曲线曲面的造型技术多样化要求又面临着许多新的问题和挑战。

为此，这些年，随着q-微积分的发展，一类基于q-整数的广义Bernstein算子得到了迅速的发展。1968年Stancu提出Bernstein-Stancu多项式，Goldman等人做了深入的研究。而最早包含q-整数的广义Bernstein算子是1987年Lupas提出的Lupas q-

模拟Bernstein算子。1996年Phillips提出了另一种基于q-整数的广义Bernstein算子，即q-Bernstein算子，成为了目前研究比较广泛的广义Bernstein算子。之后2004年Stanislaw等人又提出来W，Q-Bernstein基。这是第一次提出双参数的模拟Bernstein基。后来Nowak提出将两种算子结合的方法，q-模拟Bernstein-Stancu算子，也即A，Q-模拟广义Bernstein算子。

广义Bernstein算子的研究为其他领域的研究提供了合适的工具。特别是在计算机辅助几何设计（CAGD)领域，广义Bernstein算子的产生推动了自由型曲线曲面的发展。

本文首先介绍一种A，Q-模拟Bernstein算子的表示形式，并从中提取出A，Q-模拟广义Bernstein基函数，推导该基函数曲线的仿射不变性，凸包性等。最后得出他的De-casteljau算法。

1.2 相关概念

为了介绍 a,q-模拟广义 Bernstein 算子，首先引入一下记号和定义：

定义 1.1

对于给定的实数$q>0$，及任意$i\in N$，q-整数[i]定义如下[1]：

$$[i]=\begin{cases}(1-q^i)/(1-q), & q\neq 1\\ i, & q=1\end{cases} \tag{1.1}$$

定义 1.2

对于给定的实数$q>0$，及任意$i\in N$，定义 q-阶乘[i]!如下：

$$[i]!=\begin{cases}[i][i-1]\cdots[1], & q\neq 1\\ i, & q=1\end{cases} \tag{1.2}$$

特别的[0]=0, [0]!=1

定义 1.3

对于给定的实数$q>0$，及任意整数$n\geq i\geq 0$，定义 q-二项式系数$\begin{bmatrix}n\\ i\end{bmatrix}$如下：

$$\begin{bmatrix}n\\ i\end{bmatrix}=\frac{[n][n-1]\cdots[n-i-1]}{[i]!}=\frac{[n]!}{[i]![n-i]!} \tag{1.3}$$

特别的，q-二项式系数满足帕斯卡型递推关系式：

$$\begin{bmatrix}n\\i\end{bmatrix} = q^{n-i}\begin{bmatrix}n-1\\i-1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}n-1\\i\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}n-1\\i-1\end{bmatrix} + q^{i}\begin{bmatrix}n-1\\i\end{bmatrix} \tag{1.4}$$

定义 1.4（A,Q-模拟广义 Bernstein 算子），令 $f(x)\in C[0,1]$，线性算子 $L_{n,q}:C[0,1]\to C[0,1]$ 定义为：

$$L_{n,q}(f;x) = \sum_{i=0}^{n} B_i^n f_i$$

其中 $f_i = f(\frac{[i]}{[n]}), B_i^n = \frac{\begin{bmatrix}n\\i\end{bmatrix}\prod_{j=0}^{i-1}(x+a[j])\prod_{s=0}^{n-i-1}(1-xq^s+a[s])}{\prod_{s=0}^{n-1}(1+a[j])}$，

称 $L_{n,q}(f;x)$ 为 A，Q-模拟广义 Bernstein 算子，且满足：$x\in[0,1], 0\le q<1, a\ge 0$.

1.3 本文研究内容

本文共分四章，各章主要内容如下：

1， 第一章介绍了本文的研究背景和相关概念，给出了文章结构框架。

2， 第二章提出了一种 a,q-模拟广义 Bernstein 基的构造曲线曲面的方法，分析了基函数的性质，然后通过这类基构造曲线，并用于曲线造型。

3， 第三章提出运用 a,q-模拟广义 Bernstein 基函数和 Poisson 基函数来构造一类张量积基函数，分析基函数的性质，同时应用到曲面造型。

4， 第四章对本文研究成果，创新点等进行总结，并展望了进一步的研究方向。

第二章　A,Q-模拟广义 Bézier 曲线

2.1 引言

Bézier 曲线，B 样条曲线是 CAGD 中曲线造型的两种重要的方法，后来又出现了 q-整数的广义 Bernstein 算子，从正统的基变成带有 q 参数的基，是一种自然的发展。q-Bernstein 基的优点是曲线的许多变化都能由相关的 q 的推广得到解决，这给理论分析和编程计算都带来很大方便。

这一章的目的就是提取出相关的 A,Q-模拟广义 Bernstein 基，构成曲线。

2.2 A,Q-模拟广义 Bernstein 基的定义和性质

2.2.1 A,Q-模拟广义 Bernstein 基的定义

从 a,q-模拟广义 Bernstein 算子提取出 a,q-模拟广义 Bernstein 基函数，定义如下

定义 2.1（A,Q-模拟广义 Bernstein 基函数）。

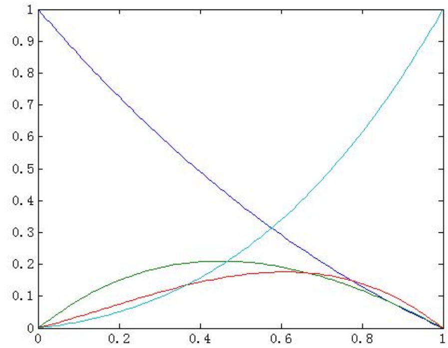
对于给定实数 $0< q< 1, \alpha \geq 0$，$b_0^n(t;\alpha|q), b_1^n(t;\alpha|q), \cdots b_n^n(t;\alpha|q)$ 为[0,1]区间上次数不超过 n 次的一元多项式空间 P_n 的一组基函数，其中

$$b_i^n(t;\alpha|q) = \frac{\left[{n \atop i}\right] \prod_{j=0}^{i-1}(t+\alpha[j]) \prod_{s=0}^{n-i-1}(1-tq^s+\alpha[s])}{\prod_{j=0}^{n-1}(1+\alpha[j])}, i=0,1,\cdots,n.$$

称 $b_0^n(t;\alpha|q), b_1^n(t;\alpha|q), \cdots b_n^n(t;\alpha|q)$ 为 a,q-模拟广义 Bernstein 基函数。

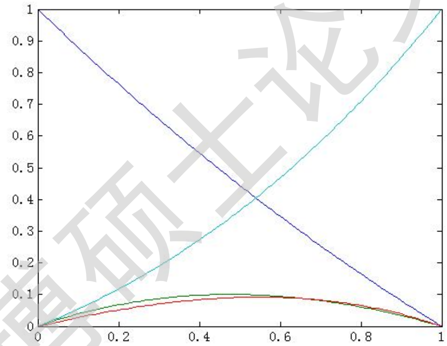
a,q-模拟广义 Bernstein 基函数继承了经典 Bernstein 基函数的许多基本性质。下面给出图形描述。

当 q=0.5，a=0.5<1 时的 3 次 a,q 模拟广义 Bernstein 基函数如图（1）所示:



(1) $b_i^3(t;a=\frac{1}{2}|q=\frac{1}{2})$ 基函数图像

当 q=0.5，a=2>1 时的 3 次 a,q 模拟广义 Bernstein 基函数如图（2）所示:



(2) $b_i^3(t;a=2|q=\frac{1}{2})$ 基函数图像

2.2.2 A,Q-模拟广义 Bernstein 基的性质

定理 2.1

a,q-模拟广义 Bernstein 基函数具有如下基本性质：

1，非负性； 2，单位分解性； 3，端点性；4, 退化性；5，线性无关性

证明：

1，非负性

对于 $0<q<1, \alpha \geq 0, t \in (0,1)$。

$b_i^n(t;\alpha|q) \geq 0$

2，单位分解性

当 n=1 时，显然有：$\sum_{i=0}^{1} b_i^1 = 1$

假设当 n=m 时满足，当 n=m+1 时：

由

$$\frac{[i]}{[m+1]} b_i^{m+1}(t;\alpha|q) = \frac{t+\alpha[i-1]}{1+\alpha[m]} b_{i-1}^m(t;\alpha|q)$$

$$\frac{[m+1-i]}{[m+1]} b_i^{m+1}(t;\alpha|q) = \frac{1-q^{m-i}t+\alpha[m-i]}{1+\alpha[m]} b_i^m(t;\alpha|q)$$

$$\frac{q^{m-i}[i]}{[m]} b_i^m(t;\alpha|q) + \frac{[m-i]}{[m]} b_i^m(t;\alpha|q) = b_i^m(t;\alpha|q)$$

可得：

$$\sum_{i=0}^{m+1} b_i^{m+1}(t;\alpha|q) = \sum_{i=0}^{m+1} \left(\frac{1-q^{m-i}x+\alpha[m-i]}{1+\alpha[m]} b_i^m(t;\alpha|q) + q^{m+1-i}\frac{t+\alpha[i-1]}{1+\alpha[m]} b_{i-1}^m(t;\alpha|q)\right),$$

其中 $b_{-1}^{m+1}(t;\alpha|q) = b_{m+1}^m(t;\alpha|q) = 0$

$$\sum_{i=0}^{m+1} b_i^{m+1}(t;\alpha|q) = \sum_{i=0}^{m} \left(\frac{1-q^{m-i}t+\alpha[m-i]}{1+\alpha[m]} b_i^m(t;\alpha|q) + \frac{q^{m-i}t+\alpha q^{m-i}[i]}{1+\alpha[m]} b_i^m(t;\alpha|q)\right)$$

$$= \sum_{i=0}^{m} b_i^m(t;\alpha|q)$$

$$= 1$$

得证。

3，端点性

$$b_i^n(0;\alpha\,|\,q)=\begin{cases}0 & i\neq 0\\ 1 & i=0\end{cases}\qquad b_i^n(1;\alpha\,|\,q)=\begin{cases}0 & i\neq n\\ 1 & i=n\end{cases}$$

4，退化性

当 $\alpha=0$ 时，$b_i^n(t;\alpha\,|\,q)$ 退化为 q-Bernstein 基函数，由 Phillips 于 1996 年提出。即：

$$\lim_{\alpha\to 0} b_i^n(t;\alpha\,|\,q)=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\begin{bmatrix}n\\ i\end{bmatrix}\prod_{j=0}^{i-1}(t+\alpha[j])\prod_{s=0}^{n-i-1}(1-tq^s+\alpha[s])}{\prod_{j=0}^{n-1}(1+\alpha[j])}=\begin{bmatrix}n\\ i\end{bmatrix}t^i\prod_{s=0}^{n-i-1}(1-tq^s)$$

当 $q=1$ 时，$b_i^n(t;\alpha\,|\,q)$ 退化为 Bernstein-Stancu 多项式，由 Stancu 于 1968 年提出。即：

$$\lim_{q\to 1} b_i^n(t;\alpha\,|\,q)=\lim_{q\to 1}\frac{\begin{bmatrix}n\\ i\end{bmatrix}\prod_{j=0}^{i-1}(t+\alpha[j])\prod_{s=0}^{n-i-1}(1-tq^s+\alpha[s])}{\prod_{s=0}^{n-1}(1+\alpha[j])}=\frac{\binom{n}{i}\prod_{j=0}^{i-1}(t+\alpha j)\prod_{s=0}^{n-i-1}(1-t+\alpha s)}{\prod_{s=0}^{n-1}(1+\alpha j)}$$

当 $q=1$, $\alpha=0$ 时，$b_i^n(t;\alpha\,|\,q)$ 退化为经典 Bernstein 多项式。即：

$$\lim_{\substack{q\to 1\\ \alpha\to 0}} b_i^n(t;\alpha\,|\,q)=\binom{n}{i}t^i(1-t)^{n-i}$$

5，线性无关性

先介绍一种欧拉恒等式的推广：

$$\prod_{s=0}^{n-i-1}(1-q^{s}x+a[s])=\sum_{s=0}^{n-i}(-1)^{s}q^{s(s-1)/2}\left[{n-i \atop s}\right]\prod_{j=0}^{s-1}(x+a[j])\prod_{j=s}^{n-i-1}(1+a[j])$$

当 i=0,a=0 时，原式退化为欧拉恒等式，证明见[7].

证明：

代入 $b_i^n(t;a\,|\,q)$ 得：

$$b_i^n(t;a\,|\,q)=\frac{\left[{n \atop i}\right]\prod_{j=0}^{i-1}(x+a[j])\sum_{s=0}^{n-i}(-1)^{s}q^{s(s-1)/2}\left[{n-i \atop s}\right]\prod_{j=0}^{s-1}(x+a[j])\prod_{j=s}^{n-i-1}(1+a[j])}{\prod_{j=0}^{n-1}(1+a[j])}$$

由 x 的最高次系数容易得出结论。

定理 2.2

n 次 a,q-模拟广义 Bernstein 基函数可分别由两个 n-1 次或 n+1 次 a,q-模拟广义 Bernstein 基函数得到，即

$$\begin{cases}
b_i^n(t;a\,|\,q)=\dfrac{[n+1-i]}{[n+1]}b_i^{n+1}(t;a\,|\,q)+\left(1-\dfrac{[n-i]}{[n+1]}\right)b_{i+1}^{n+1}(t;a\,|\,q)\\[2ex]
b_i^n(t;a\,|\,q)=\dfrac{1-q^{n-i-1}t+a[n-i-1]}{1+a[n-1]}b_i^{n-1}(t;a\,|\,q)+\dfrac{q^{n-i}t+aq^{n-i}[i-1]}{1+a[n-1]}b_{i-1}^{n-1}(t;a\,|\,q)\\[2ex]
b_i^n(t;a\,|\,q)=\dfrac{q^{i}-q^{n-1}t+aq^{i}[n-i-1]}{1+a[n-1]}b_i^{n-1}(t;a\,|\,q)+\dfrac{t+a[i-1]}{1+a[n-1]}b_{i-1}^{n-1}(t;a\,|\,q)
\end{cases}$$

证明：升阶公式

$$b_i^n(t;a\,|\,q)=b_i^n(t;a\,|\,q)\left(1+\frac{1-q^{n-i}t+a[n-1]}{1+a[n]}-\frac{1-q^{n-i}t+a[n-1]}{1+a[n]}\right)$$

$$=\frac{1-q^{n-i}t+a[n-1]}{1+a[n]}b_i^n(t;a\,|\,q)+\frac{a[n]+q^{n-i}t-a[n-1]}{1+a[n]}b_i^n(t;a\,|\,q)$$

$$=\frac{[n+1-i]}{[n+1]}b_i^{n+1}(\mathrm{t};a\,|\,q)+\left(1-\frac{[n-i]}{[n+1]}\right)b_{i+1}^{n+1}(\mathrm{t};a\,|\,q)$$

证明：递推公式

$$\frac{[i]}{[\mathrm{n}]}b_i^n(t;a\,|\,q)=\frac{t+a[i-1]}{1+a[\mathrm{n}-1]}b_{i-1}^{n-1}(t;a\,|\,q)$$

$$\frac{[\mathrm{n}-i]}{[\mathrm{n}]}b_i^n(t;a\,|\,q)=\frac{1-q^{n-i-1}x+a[n-i-1]}{1+a[\mathrm{n}-1]}b_i^{n-1}(t;a\,|\,q)$$

$$\frac{q^{n-i}[i]}{[\mathrm{n}]}b_i^n(t;a\,|\,q)+\frac{[\mathrm{n}-i]}{[\mathrm{n}]}b_i^n(t;a\,|\,q)=b_i^n(t;a\,|\,q)$$

$$\frac{q^i[\mathrm{n}-i]}{[\mathrm{n}]}b_i^n(t;a\,|\,q)+\frac{[\mathrm{i}]}{[\mathrm{n}]}b_i^n(t;a\,|\,q)=b_i^n(t;a\,|\,q)$$

把 $q^i[n-i]+[i]=[n]$ 代入可得

$$\begin{cases} b_i^n(\mathrm{t};a\,|\,q)=\dfrac{1-q^{n-i-1}t+a[n-i-1]}{1+a[n-1]}b_i^{n-1}(\mathrm{t};a\,|\,q)+\dfrac{q^{n-i}t+aq^{n-i}[i-1]}{1+a[n-1]}b_{i-1}^{n-1}(\mathrm{t};a\,|\,q) \\[2ex] b_i^n(\mathrm{t};a\,|\,q)=\dfrac{q^i-q^{n-1}t+aq^i[n-i-1]}{1+a[n-1]}b_i^{n-1}(\mathrm{t};a\,|\,q)+\dfrac{t+a[i-1]}{1+a[n-1]}b_{i-1}^{n-1}(\mathrm{t};a\,|\,q) \end{cases}$$

定理 2.3

在 CAGD 中的许多应用，特别是细分，要求基函数的定义的区域是任意的。